Linear differential equations on $\mathbb{P}^1$ and root systems (Problems in Representation Theory and Harmonic Analysis)

数理解析研究所講究録
第 1770 巻 2011 年 20-34

Linear differential equations on $\mathbb{P}^1$ and root systems

廣惠一希 (Kazuki Hiroe)*
東京大学大学院数理科学研究科
Graduate school of Mathematical sciences, University of Tokyo

概要

ここでは Euler 変換とそこから現れる組み合わせ論的問題が Kac-Moody Lie 代数のルート系とその鏡映変換によって記述できるということの概説をしたい．文章中の定理等の正確な主張，証明は [3],[4],[6],[9] とその参考文献を参照していただきたい．

1 Euler transform (integral transform)

Euler 変換とは適当な関数 $f(x)$ に対して次のように定義される積分変換である．

$$I_a^{\mu}f(x):=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_a^x(x-t)^{\mu-1}f(t)\,dt \text{ for } \mu,a\in\mathbb{C}.$$

ここで一つ重要なこととして $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し，

$$I^{-n}f(x)=\frac{d^n}{dx^n}f(x) \quad (\text{ by Cauchy's integration theorem})$$

が成り立つということがある．さらに Leibniz の法則を自然に一般化した法則も成り立つことがわかり，これらの性質から，Euler 変換は微分作用素の巾の一般化と見ることができる．従って，

$$\partial^{\mu}f(x):=I^{-\mu}f(x) \quad (\text{fractional derivative}).$$

とも書くことにする．この Euler 変換 (あるいは Riemann-Liouville 変換) は分数階微分作用素 (fractional operator) とも呼ばれ，さまざまな分野で研究がなされているが，ここでは以下のような性質に着目することにする．

多項式係数の微分作用素 $P(x,\partial)$ から Euler 変換を用いて新しい微分作用素 $R(x,\partial)$ をつくることを考えよう．すなわち，

$$P(x,\partial)\overset{\mathrm{Ad}(\partial^{\mu})}{\rightsquigarrow}R(x,\partial)=\partial^{-\mu+m}P(x,\partial)\,\partial^{\mu}$$

ここで多項式係数なので一般化された Leibniz の法則は有限和となり，さらに上記の $m\in\mathbb{Z}$ を適当に選べば $R(x,\partial)$ は再び多項式係数の微分作用素とできる．ここで重要なことは，この変換は次

* E-mail:kazuki@ms.u-tokyo.ac.jp

のように解の変換も同時に与えているということである.

$$P(x,\partial)u=0 \Rightarrow \begin{array}{rcl} R(x,\partial)I^{\mu}u & = & \partial^{-\mu+m}P\partial^{\mu}I^{\mu}u \\ & = & \partial^{-\mu+m}Pu \\ & = & 0 \end{array}.$$

すなわち,

$$\text{Sol's of } Pu=0 \overset{I^{\mu}}{\rightsquigarrow} \text{Sol's of } Rv=0.$$

と言うように Euler 変換は, 既知の微分作用素から新しい微分作用素を作ると同時に, 新たに得られた微分方程式の解を既知の方程式の解から構成する操作となっている.

Example (Gauss's hypergeometric equation) 上記のことを Gauss の超幾何方程式を例にとって見てみよう.

$$x(1-x)\partial^2u+(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)\partial u-\alpha\beta u=0. \tag{1}$$

この方程式に Euler 変換を施してみる. すると,

$$\begin{aligned}&\partial^{-\beta}(x(1-x)\partial^2+(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)\partial-\alpha\beta)\partial^{\beta-1}\\ &=x(1-x)\partial+(\gamma-\beta)-(\alpha-\beta+1)x)\end{aligned}$$

となり一階の微分方程式が得られた. この一階の方程式の解は $x^{\beta-\gamma}(1-x)^{\alpha-\gamma+1}$ と容易に求めることができる. 従って解の Euler 変換を考えれば, 方程式 (1) の解は

$$I_c^{\beta-1}x^{\beta-\gamma}(1-x)^{\alpha-\gamma}=\frac{1}{\Gamma(-\beta)}\int_c^x t^{\beta-\gamma}(1-t)^{\alpha-\gamma}(x-t)^{-\beta}\,dt$$

となる. この解は少し変数変換をしてあげれば, よく知られた Gauss の超幾何関数の Euler 型の積分表示を与えていることが見れる.

2 Euler transform (revisit)

上記の Euler 変換をより代数的に正確な定義を次に与えよう (*1).

K を標数 0 の代数閉体とし, $W[x]$ で一変数の Weyl 代数, つまり多項式係数の微分作用素環とする. さらに $W(x)$ で係数を有理関数体 $K(x)$ にもつ微分作用素環としよう. 以下にいくつかの基本的な操作を列挙しておく.

Fourier-Laplace transform:

$$\begin{array}{rccc}\mathcal{L}: & W[x] & \longrightarrow & W[x] \\ & x & \longmapsto & -\partial \\ & \partial & \longmapsto & x\end{array}.$$

*1 次に与える定義は実は Katz の Euler 変換 (middle convolution) の定義とは一般には異なる. しかし良い条件下では両者は一致し, さらにここで採用する定義は直接的に計算が容易なのでこちらを採用する. ここでの定義は大島利雄 [9] による.

次の操作が代数的 Euler 変換の理論では重要である.

Reduced form*2 (Red(P)):

$P \in W(x)$ に対し, $\mathrm{Red}(P) \in K(x)^\times P \cap W[x]$ を次のように定義する.

$\mathrm{Red}(P) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x)\partial^i$ とかくと, $\gcd_{K[x]}(p_i(x)) = 1$ であり, さらに最高次の係数 $p_n(x)$ はモニックである.

例えば,

$$P = \frac{3(x-1)}{x^2}\partial + x(x-1)^2 \Longrightarrow \mathrm{Red}(P) = \partial + \frac{1}{3}x^3(x-1).$$

Addition: $P \in W(x)$, $f(x) \in K(x)$, $\lambda \in K$ に対し,

$$\mathrm{Ad}(e^{f(x)})P(x,\partial) = P(x, \partial - \frac{d}{dx}f(x)),$$

$$\mathrm{Ad}(x^\lambda)P(x,\partial) = P(x, \partial - \lambda/x)$$

と定義する. これらは単に $e^{f(x)}$ や x^λ をそれらの逆作用素とで両側から共役をとる操作である.

以上の操作を用いて Euler 変換を次のように代数的に定義する.

Euler transform:

$P \in W(x)$ と $\mu \in K$ に対し,

$$E(\mu)P := \mathcal{L} \circ \mathrm{Red} \circ \mathrm{Ad}(x^\mu) \circ \mathcal{L}^{-1} \circ \mathrm{Red}P.$$

Remark 1. 上記の代数的定義と元の積分変換の関係は次の式変形から明らかであろう.

$$I_c^\mu g(z) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_c^z g(x)(z-x)^{\mu-1}\,dx = \int_{-i\infty}^{i\infty} y^{-\mu}\int_c^\infty g(x)e^{-xy}\,dx\,e^{zy}\,dy.$$

上で Gauss の超幾何函数が Euler 変換によってより簡単な函数に帰着されることを見た. さてここでは次のような問題を考えたい.

問題

1. Euler 変換と addition 達のなす群はどんなものか？
2. そして微分作用素のこの群作用での軌道はどのようなものか？
3. あるいはこの群作用はどのような表現として実現できるか？

まずは基本的な例として再び Gauss の超幾何方程式でかんがえてみよう.

Gauss' hypergeometric equation

Fuchs 型の微分方程式の特異点のまわりでの局所解の特性指数を並べた表を Riemann 図式とよぶが, Gasuu の超幾何方程式の Riemann 図式は

$$\left\{\begin{matrix} x=0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta \end{matrix}\right\}$$

---

*2 ここの操作が Katz とは異なる. Katz のものと同じにするには, この操作を $\mathscr{D}$ 加群の極小拡大に置き換える.

である．さて前に見た例では Euler 変換によって Gauss の方程式を一階の方程式に変換したが，それを Riemann 図式でみてみると，

$$\left\{\begin{matrix} x=0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta \end{matrix}\right\} \xrightarrow{E(\beta)} \left\{\begin{matrix} x=0 & 1 & \infty \\ \beta-\gamma & \gamma-\alpha-1 & \alpha-\beta+1 \end{matrix}\right\}$$

とみることができる．右は一階の方程式の Riemann 図式である．

また整数差のもの達同一視したときの特性指数の重複度[*3]を記述した表をスペクトル型とよぶ．例えば Gauss の方程式の場合は，

$$\begin{bmatrix} x=0 & 1 & \infty \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

となる[*4]．従って上をスペクトル型の変化としてみると，

$$\begin{bmatrix} x=0 & 1 & \infty \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x=0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

とかける．

ここで見たスペクトル型の変化は実は D_4 型の Weyl 群の鏡映変換とみることができるのある．そのために上の例をより一般の形でみてみる．すなわち次のようなスペクトル型をもつ微分作用素 $P(x,\partial)$ を形式的に考えよう．

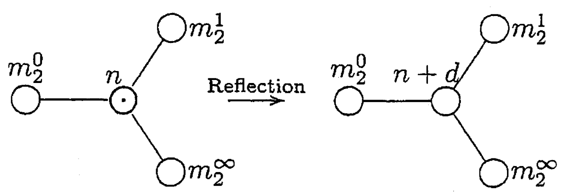
$$\begin{bmatrix} x=0 & 1 & \infty \\ m_1^0 & m_1^1 & m_1^\infty \\ m_2^0 & m_2^1 & m_2^\infty \end{bmatrix}$$

このときこの $P(x,\partial)$ に Euler 変換をほどこすとスペクトル型は次のように変換されることが確かめられる．

$$\begin{bmatrix} x=0 & 1 & \infty \\ m_1^0 & m_1^1 & m_1^\infty \\ m_2^0 & m_2^1 & m_2^\infty \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Euler trans.}} \begin{bmatrix} x=0 & 1 & \infty \\ m_1^0+d & m_1^1+d & m_1^\infty+d\ , \\ m_2^0 & m_2^1 & m_2^\infty \end{bmatrix}$$

ここに $d=m_2^0+m_2^1+m_2^\infty-2n$ であり，n は微分作用素の階数である．

この変換をよくみると，下図の Dynkin 図に対応するルート系のルート格子の元を真ん中の単純ルートで鏡映変換していることに他ならないことがわかる．



---

*3 正確には，さらに log 項はでないとしないといけない．すなわち局所モノドロミーは対角化可能としたときの，同じ固有値のブロックの大きさを表している．

*4 $1-\gamma, \gamma-\alpha-\beta, \alpha-\beta$ は整数でないと (少し強いが) 仮定した．

また，残りの単純ルートでの鏡映は addition によって実現できる．

したがってこれは次のように解釈できる．$P(x,\partial)$ に対して $\mathbb{Z}$ 格子

$$L(P)=\left\{(a_1,a_2;b_1,b_2;c_1,c_2)\in\mathbb{Z}^6 \mid \sum_{i=1}^{2}a_i=\sum_{i=1}^{2}b_i=\sum_{i=1}^{2}c_i\right\}$$

が定まり，$P(x,\partial)$ のスペクトル型はこの格子 $L(P)$ の元

$$l_P=(m_1^0,m_2^0;m_1^1,m_2^1;m_1^\infty,m_2^\infty)\in L(P)$$

と見ることができる．そして Euler 変換は

$$E\colon L(P)\ni(a_1,a_2;b_1,b_2;c_1,c_2)\mapsto(a_1+d,a_2;b_1+d,b_2;c_1+d,c_2)\in L(P)$$

という $\mathbb{Z}$ 線形な格子の自己準同型を与えている．ここに $d=a_2+b_2+c_2-2(a_1+a_2)$．また addition によって

$$\begin{aligned}\phi_a\colon(a_1,a_2)&\mapsto(a_2,a_1),\\ \phi_b\colon(b_1,b_2)&\mapsto(b_2,b_1),\\ \phi_c\colon(c_1,c_2)&\mapsto(c_2,c_1)\end{aligned}$$

という置換作用が得られる．従って上に見た Euler 変換と addition による $L(P)$ の変換のなす群を W_P と書くと，微分作用素 $P(x,\partial)$ に対し，W_P 作用をもつ $\mathbb{Z}$ 加群 $L(P)$ とその元 l_P が定まったと考えることができる．

そして D_4 型ルート系のルート格子を $Q(D_4)$，その Weyl 群を $W(D_4)$ と書くことにすれば，上記のルート系とスペクトル型の対応は

$$W(D_4)\cong W_P$$

であり，

$$\phi_P\colon Q(D_4)\xrightarrow{\sim}L(P)$$

という群作用を保つ $\mathbb{Z}$ 格子の同型写像が存在すると考えることができるのである．

一般の Fuchs 型の場合

以上で見た Fuchs 型方程式とルート系の対応が一般の Fuchs 型方程式に対して成立することは Carwley-Boevey[3] によって初めて発見された．すなわち Fuchs 型微分作用素 $P(x,\partial)$ に対して，星型 Dynkin 図をもつ Kac-Moody Lie 代数のルート系が構成でき，さらに次のような微分作用素とそれに付随する変換と，ルートと Weyl 群作用の対応が得られる．

- 既約 Fuchs 型作用素 $P(x,\partial)$ $\longleftrightarrow$ 正ルート*5
- Euler transform & Addition $\longleftrightarrow$ root reflection

*5 どのような正ルートが微分作用素と対応するかは Crawley-Boevey によって完全に決定されており，これをもって Fuchs 型の Deligne-Simpson 問題は解決された．

- アクセサリーパラメーターの数 $\longleftrightarrow$ $1-\frac{(\text{ルートの長さ})^2}{2}$

この対応をみて真っ先に連想されるのは箙の表現論における Kac の定理であろう．つまりそこでは，直既約な箙の表現と正ルートが対応し，さらに直既約表現のモジュライの次元はルートの長さによって表される．これはまさに既約 Fuchs 型微分作用素とルートの対応，アクセサリーパラメーター（局所データでは決まらないモジュライ）とルートの長さの関係そのものである．実際 Crawley-Boevey は彼の研究していた関係式付きの箙の表現 (deformed preprojective algebra) に対する Kac の定理の拡張を用いて上記の微分方程式とルート系との対応を見出した．

Gauss の超幾何方程式はアクセサリーパラメーターを持たないリジッドな方程式として知られているが，一方のアクセサリーパラメーターをもつものに関しても面白い現象がみえてくる．

Heun の微分方程式

アクセサリーパラメーターをもつ微分方程式で良く知られているものとして次の Heun の微分方程式がある．

$$\partial^2+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\epsilon}{z-t}\right)\partial+\frac{\alpha\beta z-q}{z(z-1)(z-t)}.$$

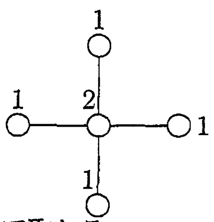
この方程式の局所解の特性指数を集めた Riemann 図式を書いてみると，

$$\left\{\begin{array}{cccc} x=0 & 1 & t & \infty \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 1-\gamma & 1-\delta & 1-\epsilon & \beta \end{array}\right\}$$

となり，上の方程式と見比べると最後の項の係数の q は Riemann 図式には現れない．つまりこれがアクセサリーパラメーターとなっている．またスペクトル型は以下のとおりである．

$$\left[\begin{array}{cccc} x=0 & 1 & t & \infty \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

ここで Crawley-Boevey の対応を用いてルートとの対応を見てみると，Heun の方程式は次のようなアファイン $D_4^{(1)}$ 型のルート系の虚ルートに対応することがわかる．



ここから次のようなことが見て取れる．

- ルートの長さの 2 乗は 0 である．Gauss の場合は 2 であったのでルートの長さがアクセサリーパラメーターの数を反映していることが見える．
- このルートは他のすべてのベクトルとの内積が 0 である．つまり Weyl 群作用で不変．

2 つめの観察は Heun の方程式が Euler 変換と addition によってアファイン $D_4^{(1)}$ 型の対称性を持つことを示唆している．ここで新たな分野との思わぬ接点画見えてくる．Heun の方程式は見かけ

の特異点を一点付け加えて，そのモノドロミー保存変形を考えることによってパンルヴェ第6方程式が得られることが知られている．さらに Euler 変換や addition がモノドロミー保存変形の方程式を不変にすることが原岡-Filipuk によって得られている．すなわち Euler 変換や addition はパンルヴェ方程式におけるベックルンド変換を作っており，さらに上のルート系との対応をみると既にパンルヴェ方程式の研究で知られていたアファイン $D_4^{(1)}$ 型 Weyl 群対称性をまさに復元しているのである．

3 不確定特異点をもつ微分方程式への拡張

これまでに見たように，Euler 変換の理論は解析的のみならず，代数的，組み合わせ論的*6にも面白い性質をもっており，またそれらが互いに影響を及ぼしあっている．

従ってこうした理論を Fuchs 型のみならず，不確定特異点をもつ微分作用素にも拡張しようという試みは自然なものだろう．実際こうした試みは，川上拓志 [8]，竹村剛一 [10]，山川大亮 [11]，D. Arinkin[1]，P. Boalch[2] らによって様々な視点から行われてきている．

特に既約かつリジッドならば1階の方程式に帰着できるという Katz の定理は Arinkin によって不確定特異点をもつ微分作用素に完全に拡張された．

Theorem 2 (Arinkin (2010) [1]). *Fuchs* 型とは限らない既約かつアクセサリーパラメーターを持たない微分作用素は，

1. *Euler* 変換 & *addition*
2. 一次分数変換
3. *Fourier-Laplace* 変換

を有限回ほどこすことによって一階の微分作用素に変換できる．

そしてルート系との対応については不確定特異点が不分岐であるという仮定のもので以下のような結果を得ることができた．一般に不確定特異点周辺では正整数 p に対して $t = x^{\frac{1}{p}}$ とおくことによって

$$e^{p(t^{-1})}t^{\lambda}\sum_{m=0}^{\infty} c_m t^m \quad (p(t) \in K[t]).$$

という形式解を得ることができる．この p は代数関数論の類似で分岐指数とよばれ，$p=1$ のとき特異点は不分岐であるといわれる．

このとき大雑把にいえば次のようなことが成り立つ．

Theorem 3 ([4]). $P(x,\partial) \in W(x)$ の特異点がすべて不分岐であるとする *(+* 局所解に関する非整数条件*)*．このとき上で説明したのと同様に $P(x,\partial)$ のスペクトル型から $\mathbb{Z}$ 格子 $L(P)$ を作るこ

*6 幾何的視点もあり，基本群の表現への応用，パンルヴェ方程式と箙多様体との関係などにも応用が知られている

とができ，スペクトル型をその格子の元として実現し，さらに $Euler$ 変換と $addtion$ はこの格子に作用する群 W_P を生成する．

以下に正確な主張を述べよう．

4 不確定特異点を持つ微分作用素と middle convolution

ここからは $P=\sum_{i=0}^{n} p_i(x)\partial^i$, $p_i(x)\in K[x]$ として，次のようなものを考える．

1. P の特異点は $x=c_1,\dots,c_p$ と $c_0=\infty$ であり，これら全ての特異点で P は不分岐であるとする．
2. 各特異点 $x=c_i\,(i=0,\dots,p)$ での局所形式解は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
&e^{f_{i,j}(1/(x-c_i))}(x-c_i)^{\lambda_{i,j,k}}\times\phi_{i,j,k,0}(x-c_i),\\
&e^{f_{i,j}(1/(x-c_i))}(x-c_i)^{\lambda_{i,j,k}+1}\times\phi_{i,j,k,1}(x-c_i),\\
&\vdots\\
&e^{f_{i,j}(1/(x-c_i))}(x-c_i)^{\lambda_{i,j,k}+m_{i,j,k}-1}\times\phi_{i,j,k,m_{i,j,k}-1}(x-c_i).
\end{aligned}
$$

ここで $j=1,\dots,k_i, k=1,\dots,l_{i,j}$ とし，$m_{i,j,k}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ は $\sum_{j=1}^{k_i}\sum_{k=1}^{l_{i,j}} m_{i,j,k}=n$ をみたす．さらに $\lambda_{i,j,k}\in\mathbb{C}$ は $\lambda_{i,j,k}-\lambda_{i,j,k'}\notin\mathbb{Z}$, $(k\neq k')$ をみたし，$f_{i,j}(x)\in\mathbb{C}[x]$ は互いに相違なる定数項を持たない多項式とし，さらに $\phi_{i,j,k,l}(x)\in\mathbb{C}[[x]]\,(l=0,1,\dots,m_{i,j,k})$ の定数項は零でないとする．

$x=c_0=\infty$ に関しても $t=\frac{1}{x}$ に関して同様に考えればよい．

さてこの時特性指数 $\lambda_{i,j,k}$ たちの組を

$$
\lambda(P)=\prod_{i=0}^{p}\prod_{j=1}^{k_i}(\lambda_{i,j,1},\dots,\lambda_{i,j,l_{i,j}}),
$$

またそれらの重複度 ($\lambda_{i,j,k}+l\,(l=\dots,m_{i,j,k}-1)$ たちを同一視した) たちの組を

$$
\mathbf{m}(P)=\prod_{i=0}^{p}\prod_{j=1}^{k_i}(m_{i,j,1},\dots,m_{i,j,l_{i,j}})
$$

と書くことにする．すると $\lambda_{(P)}, \mathbf{m}(P)$ はそれぞれ次のようなベクトル空間，$\mathbb{Z}$ 格子の元とみなすことができる．

$$\lambda(P) \in \Lambda(P) = \prod_{i=0}^{p} \prod_{j=1}^{k_i} \mathbb{C}^{l_{i,j}},$$

$$\mathbf{m}(P) \in L(P) = \{\prod_{i=0}^{p} \prod_{j=1}^{l_{i,j}} \mathbf{a}_{i,j} \mid \mathbf{a}_{i,j} = (a_{i,j,1}, \dots, a_{i,j,l_{i,j}}),$$
$$\sum_{j=1}^{k_0} \sum_{k=1}^{l_{0,j}} a_{0,j,k} = \dots = \sum_{j=1}^{k_p} \sum_{k=1}^{l_{p,j}} a_{p,j,k}\}.$$

ここで次のような添字の積集合を定義する．

$$\mathcal{J} = \prod_{i=0}^{p} \{1, 2, \dots, k_i\}$$

この時この積集合の各元 $\hat{j} = (j_0, \dots, j_p) \in \mathcal{J}$ に対し，次のような middle convolution を定義する．

Definition 4.

$$E(\hat{j}) = \prod_{i=0}^{p} \mathrm{Ad}\,(e^{f_{i,j_i}}) \prod_{i=1}^{p} \mathrm{Ad}\,((x - c_i)^{\lambda_{i,j_i,1}})$$
$$\circ\, E(1 - \lambda(\hat{j})) \prod_{i=1}^{p} \mathrm{Ad}\,((x - c_i)^{-\lambda_{i,j_i,1}}) \prod_{i=0}^{p} \mathrm{Ad}\,(e^{-f_{i,j_i}}).$$

ここで

$$\lambda(\hat{j}) = \sum_{i=0}^{p} \lambda_{i,j_i,1}.$$

Theorem 5. $Q_{\hat{j}} = E(\hat{j})P$ と書くことにすると，そのスペクトル型，

$$\{(\lambda(Q_{\hat{j}})_{i,j,k}); (m(Q_{\hat{j}})_{i,j,k})\} \quad (i = 0, \dots, p,\ j = 1, \dots, k_i,\ k = 1, \dots, l_{i,j})$$

は次のようになる．

$$\begin{aligned} m(Q_{\hat{j}})_{i,j,1} &= m_{i,j,1} + d(\hat{j}) && \textit{if } (i,j) = t_i, \\ m(Q_{\hat{j}})_{i,j,k} &= m_{i,j,k} && \textit{otherwise}, \end{aligned}$$

ここで

$$d(\hat{j}) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{k_i} (\deg\,(f_{i,j} - f_{i,j_i}) + 1) \sum_{k=1}^{l_{i,j}} m_{i,j,k}$$
$$+ \sum_{j=1}^{k_0} (\deg\,(f_{0,j} - f_{0,j_0}) - 1) \sum_{k=1}^{l_{0,j}} m_{0,j,k} - \sum_{i=0}^{p} m_{i,j_i,1}.$$

また同様に，$i \in \{1, \ldots, p\}$ に対し，

$$\lambda(Q_{\hat{j}})_{i,j,k} = \begin{cases} \lambda_{i,j,k} & \textit{if } (i, j_i) = (i, j) \textit{ and } k = 1, \\ \lambda_{i,j,k} - (\deg(f_{i,j} - f_{i,j_i}) + 1)(1 - \lambda(\hat{j})) & \textit{if otherwise.} \end{cases}$$

さらに $i = 0$ に対し，

$$\lambda(Q_{\hat{j}})_{0,j,k} = \begin{cases} \lambda_{0,j,1} + 2(1 - \lambda(\hat{j})) & \textit{if } (0, j_0) = (0, j) \textit{ and } k = 1, \\ \lambda_{0,j,k} - (\deg(f_{0,j} - f_{0,j_0}) - 1)(1 - \lambda(\hat{j})) & \textit{if otherwise.} \end{cases}$$

この定理から $E(\hat{j})$ $(\hat{j} \in \mathcal{J})$ が上で定義した $\Lambda(P), L(P)$ への作用として次のように実現できる．

$$\begin{array}{rccc} \sigma(\hat{j}): & L(P) & \longrightarrow & L(P) \\ & \mathbf{a} = \prod_{i=0}^{p} \prod_{j=1}^{k_i} (a_{i,j,1}, \ldots, a_{i,j,l_{i,j}}) & \longmapsto & \prod_{i=0}^{p} \prod_{j=1}^{k_i} (\tilde{a}_{i,j,1}, \ldots, \tilde{a}_{i,j,l_{i,j}}), \end{array}$$

ここで

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{i,j,1} &= a_{i,j,1} + d(\mathbf{a}; \hat{j}) && \text{if } (i, j) = (i, j_i), \\ \tilde{a}_{i,j,k} &= a_{i,j,k} && \text{otherwise,} \end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned} d(\mathbf{a}; \hat{j}) = & \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{k_i} (\deg(f_{i,j} - f_{i,j_i}) + 1) \sum_{k=1}^{l_{i,j}} a_{i,j,k} \\ & + \sum_{j=1}^{k_0} (\deg(f_{0,j} - f_{0,j_0}) - 1) \sum_{k=1}^{l_{0,j}} a_{0,j,k} - \sum_{i=0}^{p} a_{i,j_i,1}. \end{aligned}$$

さらに $L(P)$ の中に次のような成分の置換を考える．

$$\begin{array}{rcccl} \sigma(i_0, j_0, k_0): & L(P) & \longrightarrow & L(P) & \\ & a_{i_0,j_0,k_0} & \longmapsto & a_{i_0,j_0,k_0+1}, & \\ & a_{i_0,j_0,k_0+1} & \longmapsto & a_{i_0,j_0,k_0}, & \\ & a_{i,j,k} & \longmapsto & a_{i,j,k} & \text{if } (i, j, k) \neq (i_0, j_0, k_0). \end{array}$$

さてここで上の作用素たちで生成される群を $\tilde{W}$ と定義すると群 $\tilde{W}$ 作用をもつ $\mathbb{Z}$ 格子 $L(P)$ が得られたことになる．

同様に $\Lambda(P)$ に関しても次のような作用素を考えることができる．

$$\begin{array}{rccc} \sigma(\hat{j}): & \Lambda(P) & \longrightarrow & \Lambda(P) \\ & \prod_{i=0}^{p} \prod_{j=1}^{k_i} \nu_{i,j} & \longmapsto & \prod_{i=0}^{p} \prod_{j=1}^{k_i} \tilde{\nu}_{i,j}, \end{array}$$

ここで，$i \in \{1, \ldots, p\}$ に対し，

$$\tilde{\nu}_{i,j,k} = \begin{cases} \nu_{i,j,k} & \text{if } (i, j_i) = (i, j) \text{ and } k = 1, \\ \nu_{i,j,k} - (\deg(f_{i,j} - f_{i,j_i}) + 1)(1 - \nu(\hat{j})) & \text{if otherwise,} \end{cases}$$

また，$i=0$ に対し，

$$\tilde{\nu}_{0,j,k}=\begin{cases}\nu_{0,j_0,1}+2(1-\nu(\hat{j})) & \text{if } (0,j_0)=(0,j) \text{ and } k=1,\\ \nu_{0,j,k}-(\deg(f_{0,j}-w_{0,j_0})-1)(1-\nu(\hat{j})) & \text{if otherwise,}\end{cases}$$

ここで

$$\nu(\hat{j})=\sum_{i=0}^{p}\nu_{i,j_i,1}.$$

また同様に置換 $\sigma(i_0,j_0,k_0)$ を $\Lambda(P)$ に定義できる．

このようにして middle convolution によって群作用をもつベクトル空間 $\Lambda(P)$ と $\mathbb{Z}$ 格子 $L(P)$ をつくることができた．

4.1 商格子としての実現

上のようにして得られた $\tilde{W}$ 作用をもつ格子 $L(P)$ が Kac-Moody root 格子の商格子として実現できることを解説する．次のように番号付けられた基底で生成される $\mathbb{Z}$ 格子を Q と書くことにする．すなわち，

$$\mathcal{C}=\{c_{\hat{j}}\mid \hat{j}\in\mathcal{J}\}$$
$$\cup\{c(i,j,k)\mid i=0,\ldots,p,\ j=1\ \ldots,k_i,\ k=1,\ldots,l_{i,j_i}-1\},$$

に対して，$Q=\sum_{c\in\mathcal{C}}\mathbb{Z}c$ と定義する．さらにここに次のような対称双一次形式を定義する．

$$\langle c_{\hat{j}},c_{\hat{j}'}\rangle=-\sum_{i=0}^{p}\deg(f_{i,j_i}-f_{i,j'_i})-(p-1)$$
$$+\#\{i\mid j_i=j'_i,\ i=0,\ldots,p\},$$

$$\langle c_{\hat{j}},c(i,j,k)\rangle=\begin{cases}-1 & \text{if } (i,j_i)=(i,j) \text{ and } k=1\\ 0 & \text{if otherwise}\end{cases},$$

$$\langle c(i,j,k),c(i',j',k')\rangle=\begin{cases}2 & \text{if } (i,j,k)=(i',j',k')\\ -1 & \text{if } (i,j)=(i',j') \text{ and } |k-k'|=1\\ 0 & \text{if otherwise}\end{cases}.$$

ここで $\hat{j}=(j_0,\ldots,j_p)\in\mathcal{J}$ であった．この双一次形式をもった $\mathbb{Z}$ 格子 Q をルート格子とよぶ．さらに Q の中に $c\in\mathcal{C}$ に関する鏡映を次のように定義する．

$$\sigma_c(\alpha)=\alpha-\langle c,\alpha\rangle c.$$

そしてこれら鏡映 $\sigma_c\,(c\in\mathcal{C})$ で生成される群を W とかいて Weyl 群とよぶ．

さてこのように定義した Weyl 群 W の作用をもつルート格子 Q と微分作用素から定義した $\tilde{W}$ 作用をもつ $L(P)$ は次のような関係にある．

Theorem 6. 次のような $\mathbb{Z}$ 格子の準同型

$$\Phi\colon Q \longrightarrow L(P)$$

を考える.

$$\alpha = \sum_{\hat{j}\in\mathcal{J}} \alpha_{\hat{j}} c_{\hat{j}} + \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=1}^{k_i}\sum_{k=1}^{l_{i,j}-1} \alpha(i,j,k)c(i,j,k) \in Q,$$

に対して，$\Phi(\alpha) = \prod_{i=0}^{p}\prod_{j=1}^{k_i}(a_{i,j,1},\ldots,a_{i,j,l_{i,j}})$ を

$$a_{i,j,1} = \sum_{\{\hat{j}\in\mathcal{J}\mid j_i=j\}} \alpha_{\hat{j}} - \alpha(i,j,1),$$
$$a_{i,j,k} = \alpha(i,j,k-1) - \alpha(i,j,k) \quad \mathit{for}\ 2 \le k \le l_{i,j}.$$

と定義する．ただし $\alpha(i,j,l_{i,j}) = 0$. この時次が成り立つ.

1. Φ は全射
2. *Weyl* 群 W の Q への作用は Φ によって $\tilde{W}$ の $L(P)$ への作用に写される．すなわち,

$$\Phi(\sigma_{c_{\hat{j}}}(\alpha)) = \sigma(\hat{j})\Phi(\alpha),$$
$$\Phi(\sigma_{c(i,j,k)}\alpha) = \sigma(i,j,k)\Phi(\alpha),$$

   が全ての $\alpha \in Q$ に対して成り立つ.
3. W は特性指数の空間 $\Lambda(P)$ にも次のように作用する．すなわち $\mu \in \Lambda(P)$ に対し,

$$\sigma_{c_{\hat{j}}}\mu = \sigma(\hat{j})\mu,$$
$$\sigma_{c(i,j,k)}\mu = \sigma(i,j,k)\mu.$$

したがってこの定理によって微分作用素への middle convolution によって生成される $\tilde{W}$ 作用をもつ格子 $L(P)$ は上で定義された Kac-Moody ルート格子 Q の W 作用を保つ商格子とみることができる．さらに不確定特異点の数が高々一つならばこの Φ は単射であることも証明できる．すなわちこの場合は $L(P)$ はまさにルート格子そのものと同一視できる．例えば Fuchs 型の時がまさにこの場合である.

次に Q のなかのルート系の概念の類似として $L(P)$ の中にルート系を定義しよう．$L(P)$ の中に部分集合

$$\Delta_{\mathrm{re}}^{\Phi} = \bigcup_{\hat{j}\in\mathcal{J}} \tilde{W}\Phi(c_{\hat{j}}),$$

を定義し，この中の元を Φ 実ルートと呼ぶことにする．さらに同様に部分集合

$$F^{\Phi} = \{\mathbf{a} \in L(P) \cap \prod_{i=0}^{p}\prod_{j=1}^{k_i} \mathbb{Z}_{\ge 0}^{l_{i,j}} \backslash \{\mathbf{0}\} \mid {}^{a_{i,j,1}\ge a_{i,j,2}\ge\cdots\ge a_{i,j,l_{i,j}},\ d(\mathbf{a};\hat{j})\ge 0}_{\text{for all } i=0,\ldots,p,\ j=1,\ldots,k_i,\ \hat{j}\in\mathcal{T}(P)}\}.$$

を考え，Φ 虚ルートの集合を

$$\Delta_{\mathrm{im}}^{\Phi} = \tilde{W}F^{\Phi} \cup -(\tilde{W}F^{\Phi})$$

と定義する．そしてこれらの和集合

$$\Delta^{\Phi} = \Delta^{\Phi}_{\rm re} \cup \Delta^{\Phi}_{\rm im}$$

と書いて，この中の元を Φ ルートと呼ぶ．ここで Φ がさらに単射ならばこの Φ ルートは Q のルートの集合に含まれることが示される（虚ルートは完全に一致し，実ルートは後の定理のために少し意図的に削ってある）．

また，

$$\Delta^{\Phi+} = \Delta^{\Phi} \cap \prod_{i=0}^{p}\prod_{j=1}^{k_i} \mathbb{Z}_{\geq 0}^{l_{i,j}}$$

の元を Φ 正ルートとよぶことにする．このようにルート系の類似として $L(P)$ に
Phi ルート系を導入することができたが，これはもとの微分作用素 P の既約性と次のように関係している．

Theorem 7. $P \in W[x]$ は前の通りとし，$\lambda(P) \in \Lambda(P)$ は *generic**7とする．この時 $P \in W[x]$ が $W(x)$ の中で既約であることと，次は同値．すなわち $\mathbf{m}(P)$ は Φ 正ルートであり，さらに $\mathrm{idx}\,\mathbf{m}(P) = 0$ ならば $\mathbf{m}(P)$ に関して $\gcd(m_{i,j,k}(P)) = 1$.

ここで $\mathrm{idx}\,\mathbf{m}(P) = \langle \Phi^{-1}(\mathbf{m}(P)), \Phi^{-1}(\mathbf{m}(P)) \rangle$ とした．

これは箙の表現の直既約表現の存在と次元ベクトルが正ルートであることの同値性を示した Kac の定理の（少し弱いが）類似といえる．

またこの応用として既約リジッドな Fuchs 型微分作用素が middle convolution によって階数 1 の微分作用素から構成できるという Katz の定理の不確定特異点版が簡単な系として従う．

Theorem 8. $P \in W[x]$ は定理 7の通りとし，さらに $W(x)$ で既約とする．このとき $\mathrm{idx}\,\mathbf{m}(P) = 2$ であることと，$E(\hat{j})$ と $\sigma(i,j,k)$ の繰り返しで階数 1 の作用素に帰着できることは同値．

証明は階数 1 の作用素が単純 Φ ルート $c_{\hat{j}}\ (\hat{j} \in \mathcal{J})$ に対応することに加えて，$\alpha \in \Delta^{\Phi}$ に対し $\langle \alpha, \alpha \rangle = 2$ と $\alpha \in \Delta^{\Phi+}$ が同値であることに注意すればよい．

上の定理についていくつかの注意をすると，Fuchs 型の場合と異なりルート格子との対応は全射でしかない．不確定特異点が高々一つの場合 (Fuchs 型を含む) は同時に単射となることが確かめられるが，一般にはそうはならない．この単射性の崩れは，不確定特異点が 2 点以上ある場合はアクセサリーパラメーターのなすモジュライ空間が箙多様体にはならないと主張する P. Boalch の考察を裏付けているのかもしれない．また，上の定理では残念ながら Deligne-Simpson 問題，つまり既約方程式とルートとの完全な対応は得られていない*8.

こうしたルート系との対応はアクセサリーパラメーターをもつ方程式の研究にむしろ有効で，例えば Fuchs 型のときに示したパンルヴェ方程式との関係は不確定特異点まで考えると，さらに鮮明になる．

---

*7 定義は原論文参照

*8 正実ルートとの対応はこの定理と Arinkin の結果から従う

Heun の方程式の合流型方程式

先にみた Fuchs 型の Heun の方程式の特異点を合流させることによって，また別の方程式を得ることができる．この合流操作によって不確定特異点をもつ方程式が得られるが，そのなかで不分岐な特異点のみをもつものの簡単なリストを下にあげておく．

Heun	Confluent Heun	Biconf Heun	Triconf Heun	Doubleconf Heun
$1+1+1+1$	$1+1+2$	$1+3$	4	$2+2$
$D_4^{(1)}$	$A_3^{(1)}$	$A_2^{(1)}$	$A_1^{(1)}$	$A_1^{(1)} \oplus A_1^{(1)}$

一行目は名前，二行目は通例に習って特異点の不確定度 (に 1 を加えた数) を表している．たとえば $1+1+1+1$ は確定特異点 (不確定度 0) が 4 点，$1+1+2$ は確定特異点が 2 点，不確定度 1 の特異点が 1 点というように読める．そして最後の行が定理によって得られた対応するルート系を表している．Fuchs 型同様この図から

- ルートの長さの 2 乗はすべて 0.
- 対応するルートは他のすべてのベクトルと直交している．つまり Weyl 群不変.

ということがすぐ見て取れるだろう．すなわちこれらの方程式は Euler 変換と addition によって対応するアファイン Weyl 群の対称性をもっており，さらに期待されるように対応するパンルヴェ方程式のベックルンド変換のなす対称性と一致*9しているのである．

参考文献

[1] D. Arinkin, *Rigid irregular connection on* $\mathbb{P}^1$, *Compositio Math.* **146**, no.5, p.1323–1338, 2010.

[2] P. Boalch, *Irregular connections and Kac-Moody root systems*, 2008, arXiv:0806.1050.

[3] W. Crawley-Boevey, *On matrices in prescribed conjugacy classes with no common invariant subspace and sum zero*, *Duke Math. J.* **118**, no. 2, 339–352, 2003.

[4] Y. Haraoka and G. Filipuk, *Middle convolution and deformation for Fuchsian systems.* J. Lond. Math. Soc. (2) **76** (2007), no. 2, 438–450.

[5] K. Hiroe, *Linear differential equations on* $\mathbb{P}^1$ *and root systems*, preprint 2011.

[6] N. Katz, Rigid local systems, Annals of Mathematics Studies, 139. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[7] H. Kawakami, A. Nakamura and H. Sakai, in preparation.

[8] H. Kawakami, *Generalized Okubo systems and the middle convolution*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2010, no. 17, 3394-3421.

*9 パンルヴェ第 3 方程式の対称性は $(A_1 \oplus A_1)^{(1)}$ なので完全に一致するというと言い過ぎかもしれないが，スペクトル型の空間 $L(P)$ は双一次形式付きの格子として $A_1^{(1)} \oplus A_1$，すなわち $(A_1 \oplus A_1)^{(1)}$ のルート格子と同一視できる．

[9] T. Oshima, *Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations*, preprint 2010.

[10] K. Takemura, *Introduction to middle convolution for differential equations with irregular singularities*, 2010 arXiv:1002.2535.

[11] D. Yamakawa, *Middle Convolution and Harnad Duality*, Math. Ann., 2010.